Herleitung der Barometerformel

Bei Veränderung der Höhe um dh ändert sich der Druck um

$$dp = -dh \cdot \varrho_0 \cdot g \cdot \frac{T_0 \cdot p}{T \cdot p_0}$$

wobei ϱ_0 die Dichte der Luft beim Druck p_0 und der Temperatur T_0 ist. Da die Lufthülle der Erde gegenüber dem Erdradius klein ist, nehmen wir die Erdbeschleunigung g als konstant an.
Aufgelöst nach dh und integriert:

$$\begin{aligned} dh &= -\frac{T \cdot p_0}{\varrho_0 \cdot g \cdot T_0 \cdot p} \cdot dp \\ \int dh &= -\frac{T \cdot p_0}{\varrho_0 \cdot g \cdot T_0} \cdot \int \frac{1}{p} \cdot dp \\ h &= -\frac{T \cdot p_0}{\varrho_0 \cdot g \cdot T_0} \cdot \ln p \end{aligned}$$

Mit eingesetzten Integrationsgrenzen erhalten wir

$$h_2 - h_1 = -\frac{T \cdot p_0}{\varrho_0 \cdot g \cdot T_0} \cdot (\ln p_2 - \ln p_1)$$

oder etwas vereinfacht:

$$\Delta h = h_2 - h_1 = \frac{T \cdot p_0}{\varrho_0 \cdot g \cdot T_0} \cdot \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) \tag{1}$$

Konstanter Term zusammengefasst und Auflösung nach p_2

$$\begin{aligned} k &= \frac{\varrho_0 \cdot g \cdot T_0}{p_0} \\ \Delta h &= \frac{T}{k} \cdot \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) \end{aligned}$$

$$p_2 = p_1 \cdot e^{-\frac{k \cdot \Delta h}{T}} \tag{2}$$